page 292 1/2 - 1992 -
ECOLE NAVALE MT

ÉCOLE NAVALE

Concours 1992

Deuxième composition de mathématiques

Durée : 3 heures

I.

1. — *a.* Montrer que si (u_n) est une suite strictement positive telle que la série de terme général u_n diverge et si la suite (v_n) converge vers l,

alors la suite $w_n = \dfrac{\sum_{p=0}^{n} u_p v_p}{\sum_{p=0}^{n} u_p}$ converge aussi vers l.

b. La convergence de (w_n) entraîne-t-elle celle de (v_n) ?

2. — Déterminer $\lim_{n\to\infty} \left[\prod_{p=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{p}\right)\right]^{1/n}$.

3. — *a.* Montrer que si (u_n) et (v_n) sont deux suites strictement positives et équivalentes telles que les séries de termes généraux u_n et v_n divergent alors les sommes partielles $S_n = \sum_{p=0}^{n} u_p$ et $S'_n = \sum_{p=0}^{n} v_p$ sont des suites équivalentes.

b. En déduire un équivalent de $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

4. — Montrer plus précisément que $\gamma_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$ tend vers une limite γ que l'on ne cherchera pas à calculer. Préciser le sens de variation de γ_n et l'encadrer par deux entiers consécutifs, calculer γ_{100} et γ_{1000}.

Écrire un programme en Pascal permettant le calcul de γ_n.

5. — *a.* Montrer que si u_n est le terme général d'une série positive et que pour $n \geqslant 1$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\lambda}{n} + v_n$ où v_n est le terme général d'une série absolument convergente, alors :

$\ln \frac{u_{n+1}}{u_n} = -\frac{\lambda}{n} + w_n$ où w_n est le terme général d'une série absolument convergente.

b. En déduire qu'il existe $A > 0$ tel que u_n est équivalent à $\frac{A}{n^\lambda}$.

c. Étudier la série de terme général $u_n = \dfrac{1.3. \ldots (2n-1)}{2.4. \ldots 2n\,(2n+2)}$.

... / ...

6. — *a.* On dit que la série de terme général u_n converge au sens de Cesaro si la suite $\sigma_n = \dfrac{S_0 + S_1 + .. + S_n}{n+1}$ converge, où $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

Prouver que si la série converge, elle converge au sens de Cesaro.

b. On suppose que la série de terme général u_n converge au sens de Cesaro et que $\lim_{n\to+\infty} nu_n = 0$. Montrer que la série est convergente.

II

1. — Soit la suite récurrente définie par u_0 et $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_{n+1} = u_n + u_n^2$.

Étudier sa convergence suivant les valeurs de u_0 et préciser sa limite.

2. — *a.* On suppose que la suite converge mais n'est pas stationnaire et on pose $v_n = -u_n$; quelle relation de récurrence vérifie v_n ? Montrer que v_n est équivalent à v_{n+1}.

b. On pose $a_n = \dfrac{1}{v_n} - \dfrac{1}{v_{n+1}}$, montrer que (a_n) converge et en déduire un équivalent de v_n.

c. Quelle est la nature des séries de termes généraux v_n, $\sin(v_n^2)$ et $\dfrac{v_n}{\sqrt{n}}$?

d. Soit $b_n = a_n - 1$. Montrer que b_n tend vers 0 et en trouver un équivalent.

e. En déduire la nature de la série $t_n = v_n - \dfrac{1}{n}$.

3. — Pour quelles valeurs de u_0 la suite (u_n) tend-t-elle vers l'infini ?

Montrer qu'alors u_n^2 est équivalent à u_{n+1}.

Prouver que la suite $P_n = \dfrac{\ln u_n}{2^n}$ a une limite λ qu'on ne cherchera pas à calculer.

4. — On suppose jusqu'à la fin de la partie II u_0 strictement positif. La limite λ est fonction de u_0 seulement. Montrer que c'est une fonction croissante de u_0, que $\lambda > 0$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lambda - \dfrac{\ln u_n}{2^n} < \dfrac{1}{2^n u_n}$.

5. — Quelle est la nature des séries de termes généraux $\dfrac{1}{u_n}$ et $\dfrac{(-1)^n n}{u_n}$?

III

1. — Étudier la suite récurrente définie par u_0 et $u_{n+1} = \dfrac{1+u_n}{\sqrt{1+u_n^2}} - 1$.

2. — Étudier les séries de termes généraux u_n^2 et u_n.